УДК 517.9

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И РЕЗОНАНСЫ МАТРИЧНО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.Б. Антоневич[1], **М.Г. Кот**[2]

[1]*Белорусский государственный университет*, *Минск*
[2]*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина*

NORMALIZED FORM AND RESONANCES OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

A.B. Antonevich[1], **M.G. Kot**[2]

[1]*Belarusian State University*, *Minsk*
[2]*A.S. Pushkin Brest State University*

Исследуются матрицы-функции, которые появляются при решении систем дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами. Рассмотрен процесс приведения к нормальной форме матрицы-функции $F(\mu,\varepsilon)$, зависящей от двух переменных, с помощью матриц-функций *G* и *T*, элементы которых принадлежат более широкому кольцу, чем элементы исходной матрицы-функции $F(\mu,\varepsilon)$. Найден в явном виде главный член разложения $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ в случае матриц размерности 2. Выявлены случаи резонанса для систем с дельта-образными коэффициентами.

Ключевые слова: *матрица-функция*, *нормальная форма*, *резонанс*, *кольцо*, *главный член разложения.*

Matrix-functions that arise when solving systems of differential equations with Delta-shaped coefficients are investigated. The process of reducing the matrix-function $F(\mu,\varepsilon)$ is considered depending on two variables to the normal form by means of the matrix functions *G* and *T* such that their elements belong to a ring wide then the ring containing elements of $F(\mu,\varepsilon)$. The explicit form of the main term of expansion $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ in the case of matrices of dimension 2 is found explicitly. The cases of resonance for systems with delta-coefficients are revealed.

Keywords: *matrix-function*, *normalized form*, *resonance*, *ring*, *main term of expansion*.

Введение

Пусть $F(\mu,\varepsilon)$ есть матрично-значная функция, разлагающаяся в ряд по степеням малого параметра ε и обратимая при $\varepsilon \neq 0$:

$$F(\mu,\varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{\infty} F_k(\mu)\varepsilon^k,$$

где коэффициенты $F_k(\mu)$ – матрично-значные функции, аналитические в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $F_{k_0} \neq 0$.

В ряде приложений [1]–[2], в частности, при исследовании систем уравнений с дельта-образными коэффициентами [3], возникает вопрос о поведении обратных матриц $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$. В первую очередь это нахождение предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[F(\mu,\varepsilon)]^{-1} := S(\mu) \qquad (0.1)$$

и получение условий, когда этот предел ненулевой. Такие условия называются *условиями резонанса*.

В скалярном случае ответ очевиден. Разложение функции $\frac{1}{F}$ легко строится и оно начинается с члена $\frac{1}{F_{k_0}\varepsilon^{k_0}}$, поэтому ненулевой конечный предел существует только в случае, когда $k_0 = 0$ и тогда $S(\mu) = \frac{1}{F_0(\mu)}$.

Если $detF_{k_0}(\mu) \not\equiv 0$, то в матричном случае разложение $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ имеет аналогичный вид и начинается с $\frac{1}{\varepsilon^{k_0}}[F_{k_0}(\mu)]^{-1}$. Но если $detF_{k_0}(\mu) \equiv 0$, то задача о разложении обратной матрицы-функции становится более сложной, так как это разложение начинается с члена, содержащего $\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}$, где ν отлично от k_0. В связи с этим возникает задача о построении такого разложения и, в частности, нахождении главного члена в нем, т. е. вычислении показателя ν и коэффициента при $\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}$.

Вырожденным случаем (когда семейство матриц зависит только от одного параметра) рассматриваемой задачи является исследование резольвенты оператора A (т. е. матрицы) в пространстве $\mathbb{C}^n$. Как известно, в окрестности точки λ_0, которая является собственным значением для A, резольвента $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ допускает разложение

$$-R(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^r}D^{r-1} + \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^{r-2}}D^{r-2} + \ldots + \\ + \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)^2}D + \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)}P + \ldots,$$

где r есть наибольшая из размерностей клеток Жордана, соответствующих λ_0, P есть проектор и D – нильпотентная матрица $(D^r = 0)$ [4].

Другой подробно исследованный случай возникает в теории возмущений, когда рассматривается семейство матриц, зависящее от двух параметров, имеющее вид $A(\varepsilon) - \lambda I$ [4].

Основной задачей в данной работе является исследование матриц-функций, которые появляются при решении систем дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами. Поскольку умножение на дельта-функцию не определено в классической теории обобщенных функций, для такой системы не определено понятие решения. Поэтому рассматриваются аппроксимации формального дифференциального выражения семейством операторов L_ε, зависящих от малого параматра ε, и формальному выражению ставится в соответствие оператор L_0 – предел аппроксимирующего семейства в смысле резольвентной сходимости. Здесь особенностью задачи является то, что в общем случае оператор L_0 не определяется однозначно по исходному формальному выражению, а зависит от выбранного способа аппроксимации.

В выражение для резольвенты аппроксимирующего оператора L_ε входят матрицы-функции $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$, где $F(\mu,\varepsilon)$ имеет специальный вид

$$F(\mu,\varepsilon) = R(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon\mu). \qquad (0.2)$$

Размерность такой матрицы-функции равна числу уравнений системы; матрица-функция $R(\varepsilon)$ есть матрица, обратная к матрице $A(\varepsilon)$, составленной из коэффициентов уравнения; матрица-функция $B(z)$, зависящая аналитически от одной переменной, определяется способом аппроксимации δ-функции; переменная μ связана со спектральным параметром λ равенством $\mu^2 = -\lambda$ и рассматриваемые функции определены при $Re\,\mu > 0$.

В этих приложениях резольвента предельного оператора L_0 строится с помощью матрицы $S(\mu)$ из (0.1) [1]–[3]. Случай, когда $S(\mu) \equiv 0$, соответствует тому, что оператор L_0 (и соответственно, решения системы уравнений с дельта-образными коэффициентами в указанном смысле) не зависит от слагаемых, содержащих в качестве коэффициента δ-функцию. В случае резонанса, когда $S(\mu) \neq 0$, указанные слагаемые существенно влияют на вид оператора L_0. При этом точки, в которых матрица-функция $S(\mu)$ имеет особенности, есть точки спектра предельного оператора L_0.

Таким образом, в указанных приложениях к системам уравнений с дельта-образными коэффициентами условия резонанса позволяют найти те коэффициенты, при которых слагаемые, содержащие в качестве коэффициента δ-функцию, влияют на вид решения, матрица $S(\mu)$ позволяет построить резольвенту оператора, т. е. получить формулу решения соответствующей системы, а информация об особенностях матрицы-функции $S(\mu)$ позволяет найти спектр оператора L_0.

Отметим, что в случае одного уравнения (которому соответствует скалярная функция $F(\mu,\varepsilon)$) содержательные результаты имеют место только при бесконечно малых коэффициентах вида

$$a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

когда

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{a(\varepsilon)} = \frac{1}{a_1}\frac{1}{\varepsilon} + \frac{a_2}{a_1^2} + \ldots.$$

Так как

$$\frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon\mu) = \frac{1}{\varepsilon}\left[b_0 + b_1\varepsilon\mu + b_2\varepsilon^2 mu^2 + \ldots\right],$$

функция $F(\mu,\varepsilon)$ имеет разложение

$$F(\mu,\varepsilon) = \frac{1}{a(\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon\mu) =$$

$$= \left[\frac{1}{a_1} + b_0\right]\frac{1}{\varepsilon} + \left[\frac{a_2}{a_1^2} + b_1\mu\right] + \ldots,$$

из которого ответ получается просто: условие резонанса есть равенство $a_1 = -\frac{1}{b_0}$; при этом условии

$$S(\mu) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{F(\mu,\varepsilon)} = \frac{1}{\frac{a_2}{a_1^2} + b_1\mu}. \qquad (0.3)$$

Здесь функция $S(\mu)$ имеет особенность только в одной точке, откуда следует, что в скалярном случае оператор L_0 имеет только одно собственное значение.

1 О нормальной форме матрицы

Как и многие другие задачи, сформулированная выше общая задача упрощается, если рассматриваемую матрицу-функцию предварительно (нормальному) виду.

Приведение к нормальной форме полиномиальных матриц входит в учебные курсы алгебры [5]–[6]. Для матриц-функций, аналитически зависящих от одного параметра ε, такое приведение рассматривалось, например, в [2], [3], [7]. Особенностью данной работы является то, что рассматриваются матрицы-функции, зависящие от двух переменных, что приводит к некоторому усложнению задачи.

Пусть $\mathcal{A}(\Omega)$ есть кольцо функций, аналитических в области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Интересующие нас матрицы-функции есть матрицы с элементами из кольца K, состоящего из функций, представимых при достаточно малых ε в виде ряда

$$K = \left\{ f(\mu,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mu)\varepsilon^k \right\}, \qquad (1.1)$$

где $f_k \in \mathcal{A}(\Omega)$. Сформулированные ниже утверждения справедливы также в случае кольца формальных рядов (для которых не требуется сходимость).

Через $M(n,K)$ обозначим кольцо квадратных матриц размерности n с элементами из произвольного коммутативного кольца K. Обычно приведение к нормальной форме матрицы $F \in M(n,K)$ производится с помощью так называемых элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями называются преобразования вида:

1. Умножение какой-либо строки на элемент c из K.

2. Прибавление к строке с номером i строки с номером j, предварительно умноженной на элемент $d \in K$.

3. Перестановка местами строки с номером i со строкой с номером j.

Данные операции над строками эквивалентны умножению матрицы-функции слева соответственно на квадратные матрицы

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \cdots & & & \\ & & c & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где число c принадлежит i-й строке и i-му столбцу;

$$G'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & d & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где элемент d принадлежит i-й строке и j-му столбцу;

$$G''' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \cdots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \cdots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где элемент 0 стоит на местах (i, i), (j, j), элемент 1 стоит на местах (i, j) и (j, i).

Аналогичные операции производятся над столбцами матрицы. Такие элементарные преобразования эквиваленты умножению справа на матрицы вида

$$T'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & d & \cdots & 1 & & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где элемент d принадлежит i-й строке и j-му столбцу.

В результате ряда таких преобразований матрица F преобразуется в матрицу GFT, где G и T представляются в виде произведения матриц указанного выше вида.

Задача заключается в нахождении таких матриц G и T, при которых матрица GFT имеет наиболее простой вид, обычно диагональный.

Для приведения к диагональному виду надо построить преобразования, при которых внедиагональные члены обращаются в нуль. После преобразования вида G'' в полученной матрице на месте с номером (i,k) получаем элемент $f_{ik} - df_{jk}$. Подобрать такое значение d, при котором $f_{ik} - df_{jk} = 0$, можем только в том случае, когда f_{ik} представляется в виде $f_{ik} = f_{jk}g,\ g \in K$. С алгебраической точки зрения последнее равенство есть условие, что f_{ik} принадлежит главному идеалу, порожденному элементом f_{jk}. Поэтому результат при приведении к нормальной форме зависит от вида идеалов кольца K.

Напомним, что в случае $K = \mathbb{C}$ произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к каноническому диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

где число единиц на диагонали равно рангу r матрицы.

В классическом случае, когда K есть кольцо полиномов, матрица приводится к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

где полином $e_i(\lambda), i = 2,3,\cdots,n$ нацело делится на полином $e_{i-1}(\lambda)$ и старший коэффициент у $e_i(\lambda), i = 2,3,\cdots,n$ равен единице.

В случае, когда $K = \left\{\sum a_k \varepsilon^k\right\}$ есть кольцо функций, аналитических в окрестности нуля, матрица приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{\nu_1} & & & 0 \\ & \varepsilon^{\nu_2} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \varepsilon^{\nu_n} \end{pmatrix},$$

где, аналогичным образом, каждый диагональный элемент матрицы делится на предыдущий, т. е. $\nu_1 \le \nu_2 \le \ldots \le \nu_n$ [5]–[7].

Эти отличия нормальной формы возникают ввиду разной структуры системы идеалов соответствующих колец. Здесь $\mathbb{C}$ есть поле и не имеет собственных идеалов; в кольце полиномов каждый идеал является главным и задается конечным набором чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – нулей соответствующих многочленов; в случае кольца функций, аналитически зависящих от ε в окрестности нуля, каждый идеал является главным и порожден функцией вида ε^p.

2 Нормальная форма матрицы-функции, зависящей от двух переменных

В рассматриваемом случае кольца функций (1.1) ситуация более сложная, так как, если рассматривать преобразования указанного вида с $d \in K$, в общем случае невозможно привести матрицу к диагональному виду. Описанный ниже способ приведения к нормальной форме фактически повторяет известные вычисления для классических случаев, но они содержат в себе переход к рассмотрению более широкого кольца $\widetilde{K}$, зависящего от рассматриваемой матрицы-функции F, что позволяет построить диагональную нормальную форму матрицы, элементы которой принадлежат $\widetilde{K}$.

***Теорема* 2.1.** *Для любой матрицы-функций $F \in M(n,K)$ существуют матрицы-функции $G(\mu,\varepsilon)$ и $T(\mu,\varepsilon)$, приводящие $F(\mu,\varepsilon)$ к диагональному виду*:

$$G(\mu,\varepsilon)F(\mu,\varepsilon)T(\mu,\varepsilon) =$$
$$= diag\{\varepsilon^{\nu_1} f_1(\mu), \varepsilon^{\nu_2} f_2(\mu), \ldots, \varepsilon^{\nu_n} f_n(\mu)\},$$

где функции $f_k(\mu)$ являются элементами кольца $\widetilde{\mathcal{A}}(\Omega)$, полученного присоединением к $\mathcal{A}(\Omega)$ некоторой функции вида $\frac{1}{h}$, $h \in \mathcal{A}(\Omega)$.

При этом элементы матриц $G(\mu,\varepsilon)$ и $T(\mu,\varepsilon)$ есть ряды по степеням ε с коэффициентами из более широкого кольца $\hat{\mathcal{A}}(\Omega)$, полученного присоединением к $\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)$ еще одной функции вида $\frac{1}{h_1}$, где $h_1 \in \tilde{\mathcal{A}}(\Omega)$.

В разложениях

$$G(\mu,\varepsilon) = \sum_0 G_k(\mu)\varepsilon^k, \quad F(\mu,\varepsilon) = \sum_0 T_k(\mu)\varepsilon^k,$$

выполнено

$$detG_0(\mu) = const \ne 0, \quad detT_0(\mu) = const \ne 0.$$

Доказательство проведем для случая матриц размерности 2. В общем случае рассуждения аналогичны, но более громоздки.

Пусть

$$F(\mu,\varepsilon) = \begin{pmatrix} f_{11}(\mu,\varepsilon) & f_{12}(\mu,\varepsilon) \\ f_{21}(\mu,\varepsilon) & f_{22}(\mu,\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

где $f_{ij} \in K$. Разложение каждой из этих функций начинается с некоторой степени ε:

$$f_{ij}(\mu,\varepsilon) = \sum_{k=\nu_{ij}}^{\infty} f_{ij}^{(k)}(\mu)\varepsilon^k, \qquad (2.2)$$

где $f_{ij}^{(\nu_{ij})}(\mu) \not\equiv 0$. Переставляя, если понадобиться, строки и столбцы матрицы $F(\mu,\varepsilon)$, можно перевести в правый нижний угол элемент, разложение которого начинается со степени ε с наименьшим показателем ν_0. В силу предположения, что $F_0 \ne 0$, имеем $\nu_0 = 0$.

Умножим вторую строку матрицы на функцию

$$d(\mu,\varepsilon) = \frac{f_{12}(\mu,\varepsilon)}{f_{22}(\mu,\varepsilon)}$$

и вычтем результат из первой строки.

Это преобразование соответствуют умножению слева матрицы $F(\mu,\varepsilon)$ на матрицу

$$G_1(\mu,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -d(\mu,\varepsilon) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После этого преобразования получаем, что

$$G_1(\mu,\varepsilon)F(\mu,\varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(\mu,\varepsilon) & 0 \\ f_{21}(\mu,\varepsilon) & f_2(\mu,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$f_1(\mu,\varepsilon) = f_{11}(\mu,\varepsilon) - \frac{f_{12}(\mu,\varepsilon)f_{21}(\mu,\varepsilon)}{f_{22}(\mu,\varepsilon)},$$
$$f_2(\mu,\varepsilon) = f_{22}(\mu,\varepsilon).$$

Далее из первого столбца полученной матрицы вычтем второй, умноженный на функцию

$$d_1(\mu,\varepsilon) = \frac{f_{21}(\mu,\varepsilon)}{f_{22}(\mu,\varepsilon)},$$

то есть умножим справа матрицу $G_1(\mu,\varepsilon)F(\mu,\varepsilon)$ на матрицу

$$T_1(\mu,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_1(\mu,\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем диагональную матрицу:

$$G_1(\mu,\varepsilon)F(\mu,\varepsilon)T_1(\mu,\varepsilon) =$$
$$= \begin{pmatrix} f_1(\mu,\varepsilon) & 0 \\ 0 & f_2(\mu,\varepsilon). \end{pmatrix} := N_1(\mu,\varepsilon).$$

***Лемма* 2.1.** *Пусть*

$$f(\mu,\varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(\mu)\varepsilon^k,$$

где $f_{k_0}(\mu) \not\equiv 0$. Тогда имеет место представление $f(\mu,\varepsilon) = f_{k_0}(\mu)\varepsilon^{k_0}\phi(\mu,\varepsilon)$, где

$$\phi(\mu,\varepsilon)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k(\mu),\ \ \phi_k(\mu)=\frac{f_{k-k_0}(\mu)}{f_{k_0}(\mu)},$$

откуда следует, что функция $\psi(\mu,\varepsilon)=\frac{1}{\phi(\mu,\varepsilon)}$ *допускает разложение*

$$\psi(\mu,\varepsilon)=\frac{1}{\phi(\mu,\varepsilon)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(\mu)\varepsilon^k, \qquad (2.3)$$

коэффициенты которого также имеют вид дробей, содержащих в знаменателе $f_{k_0}(\mu)$.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $f_1(\mu,\varepsilon)=f_1(\mu)\varepsilon^{\nu_1}\varphi_1(\mu,\varepsilon), f_2(\mu,\varepsilon)=f_2(\mu)\varphi_2(\mu,\varepsilon)$ есть представление диагональных элементов матрицы $N_1(\mu,\varepsilon)$, описанное в лемме 2.1. Умножив $N_1(\mu,\varepsilon)$ на диагональную матрицу

$$D(\mu,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\phi_1(\mu,\varepsilon)^{-1} & 0\\ 0 & \phi_2(\mu,\varepsilon)^{-1}\end{pmatrix},$$

получаем, что матрица приведена к диагональному виду:

$$D(\mu,\varepsilon)G(\mu,\varepsilon)F(\mu,\varepsilon)T(\mu,\varepsilon)=$$
$$=\begin{pmatrix}\varepsilon^{\nu}f_1(\mu) & 0\\ 0 & f_2(\mu)\end{pmatrix}:=N(\mu,\varepsilon).$$

Здесь число ν есть номер первого ненулевого члена в разложении функции $f_1(\mu,\varepsilon)$.

Для завершения доказательства отметим, что здесь функция $f_2(\mu)$ принадлежит кольцу $\mathcal{A}(\Omega)$, а функция $f_1(\mu)$ принадлежит кольцу $\widetilde{\mathcal{A}}(\Omega)$, полученному присоединением к $\mathcal{A}(\Omega)$ функции $\frac{1}{f_2(\mu)}$. Элементы матриц $G_1(\mu,\varepsilon)$ и $T_1(\mu,\varepsilon)$ представляются в виде рядов, у которых коэффициенты принадлежат кольцу $\widetilde{\mathcal{A}}(\Omega)$, а элементы матрицы $D(\mu,\varepsilon)$, согласно формуле (2.2) представляются в виде рядов, у которых коэффициенты принадлежат еще более широкому кольцу $\hat{\mathcal{A}}(\Omega)$, полученному присоединением к $\widetilde{\mathcal{A}}(\Omega)$ функции $\frac{1}{f_1(\mu)}$. □

3 Главный член разложения $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$

Для матрицы-функции, имеющей нормальную форму

$$N(\mu,\varepsilon)=diag\{\varepsilon^{\nu_1}f_1(\mu),\varepsilon^{\nu_2}f_2(\mu),...,\varepsilon^{\nu_n}f_n(\mu)\},$$

где $\nu_1\ge\nu_2\ge...\nu_n$, поведение обратной матрицы-функции описывается очевидным образом. В частности, главный член $\widehat{N(\mu,\varepsilon)^{-1}}$ разложения $N(\mu,\varepsilon)^{-1}$ есть

$$\widehat{N(\mu,\varepsilon)^{-1}}=\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}diag\left\{\frac{1}{f_1(\mu)},\frac{1}{f_2(\mu)},...,0,...,0\right\},$$

где $\nu=\nu_1$ и нули стоят на местах k, для которых $\nu_k<\nu$.

Ниже для упрощения записи у матриц-функций опущены аргументы μ и ε.

***Теорема* 3.1.** *Главный член* $\widehat{[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}}$ *в разложении обратной матрицы-функции* $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ *есть произведение главных частей разложений соответствующих матриц-функций*:

$$\widehat{atF^{-1}}=\widehat{T}\widehat{N^{-1}}\widehat{D}\widehat{G}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Так как $DGFT=N$, матрица-функция F^{-1} представляется в виде произведения $F^{-1}=TN^{-1}DG$.

Как легко проверить, если произведение главных членов разложений сомножителей отлично от нуля, то главный член в разложении произведения матриц-функций есть произведение главных членов разложений сомножителей. Здесь условие, что произведение главных членов разложений сомножителей отлично от нуля, существенно. В рассматриваемом случае главные члены разложений $\widehat{T},\widehat{D}$ и $\widehat{G}$ не содержат ε и являются невырожденными матрицами, поэтому произведение (3.1) отлично от нуля и главный член разложения произведения имеет вид произведения $\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}$ на матрицу, зависящую от μ. □

Полученные утверждения дают общий ответ на поставленный вопрос, но для получения явных результатов требуются досточно громоздкие вычисления. В конкретных примерах бывает проще непосредственно построить обратную матрицу-функцию и найти главный член ее разложения. В частности, в случае матриц размерности 2 вида (2.1) имеем

$$[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}=\frac{1}{detF(\mu,\varepsilon)}\begin{pmatrix}f_{22}(\mu,\varepsilon) & -f_{12}(\mu,\varepsilon)\\ -f_{21}(\mu,\varepsilon) & f_{22}(\mu,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

где $f_{ij}(\mu,\varepsilon)$ имеют разложения (2.2).

Определитель $\det F(\mu,\varepsilon)$ разлагается по степеням ε:

$$\det F(\mu,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k(\mu)\varepsilon^k, \qquad (3.2)$$

где функции $\Delta_k(\mu)$ могут быть найдены в явном виде:

$$\Delta_0(\mu)=\det F^{(0)}(\mu)=f_{11}^{(0)}(\mu)f_{22}^{(0)}(\mu)-f_{12}^{(0)}(\mu)f_{21}^{(0)}(\mu),$$
$$\Delta_1(\mu)=f_{11}^{(0)}(\mu)f_{22}^{(1)}(\mu)-f_{12}^{(0)}(\mu)f_{21}^{(1)}(\mu)+$$
$$+f_{11}^{(1)}(\mu)f_{22}^{(0)}(\mu)-f_{12}^{(1)}(\mu)f_{21}^{(0)}(\mu),$$
$$\Delta_2(\mu)=f_{11}^{(0)}(\mu)f_{22}^{(2)}(\mu)+f_{11}^{(1)}(\mu)f_{22}^{(1)}(\mu)+$$
$$+f_{11}^{(2)}(\mu)f_{22}^{(0)}(\mu)-f_{12}^{(0)}(\mu)f_{21}^{(2)}(\mu)-$$
$$-f_{12}^{(1)}(\mu)f_{21}^{(1)}(\mu)-f_{12}^{(2)}(\mu)f_{21}^{(0)}(\mu).$$

***Теорема* 3.2.** *Если в разложении* (3.2)

$$\Delta_0(\mu)\equiv\Delta_1(\mu)\equiv...\Delta_{\nu-1}(\mu)\equiv 0$$

и $\Delta_\nu(\mu)\not\equiv 0$, *то главный член разложения* $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ *имеет вид*

$$\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}\frac{1}{\Delta_{\nu}(\mu)}\begin{pmatrix} f_{22}^{(0)}(\mu) & -f_{12}^{(0)}(\mu) \\ -f_{21}^{(0)}(\mu) & f_{11}^{(0)}(\mu) \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Заметим, что некоторые из функций $f_{ij}^{(0)}(\mu)$ могут быть равными нулю, но в силу условия, что $F^{(0)} \not\equiv 0$, хотя бы одна из этих функций отлична от нуля.

В общем случае разложение (3.2) может начинаться с любой степени ε и для разных матриц-функций число ν может быть любым.

4 Случаи резонанса для систем с дельта-коэффициентами

Применим полученный результат к матрицам-функциям вида (0.2), возникающим при исследовании систем с дельта-образными коэффициентами. Как уже отмечалось, задача заключается в получении условий на коэффициенты системы (т. е. на матрицу $R(\varepsilon)$), при которых существует ненулевой предел (0.1).

Здесь возникает ряд качественно различных случаев системы уравнений.

1. Пусть разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)}\frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)}\varepsilon + \ldots$$

и

$$F_1(\mu,\varepsilon) = R(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}B(\varepsilon\mu).$$

Тогда

$$F_1(\mu,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}F(\mu,\varepsilon),$$

где

$$F(\mu,\varepsilon) = \sum_0^{\infty} F^{(k)}(\mu)\varepsilon^k$$

– матрица-функция, рассмотренного выше вида. Так как

$$[F_1(\mu,\varepsilon)]^{-1} = \varepsilon[F(\mu,\varepsilon)]^{-1},$$

предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[F_1(\mu,\varepsilon)]^{-1} := S(\mu)$$

будет ненулевым только в том случае, когда главный член разложения $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ содержит $\frac{1}{\varepsilon}$.

Матричные коэффициенты в разложении $F(\mu,\varepsilon)$ имеют специальный вид:

$$F^{(0)} = R^{(-1)} + B^{(-1)};$$

$$F^{(1)}(\mu) = R^{(0)} + B^{(0)}\mu.$$

Поэтому при разложении определителя

$$\Delta_0(\mu) = \det[R^{(-1)} + B^{(-1)}] =$$
$$= R_{11}^{(-1)}R_{22}^{(-1)} - R_{12}^{(-1)}R_{21}^{(-1)} + R_{11}^{(-1)}B_{22}^{(-1)} -$$
$$-R_{12}^{(-1)}B_{21}^{(-1)} + B_{11}^{(-1)}B_{22}^{(-1)} - B_{12}^{(-1)}B_{21}^{(-1)}$$

и не зависит от μ. Согласно теореме 3.2, необходимым условием резонанса является $\Delta_0 = 0$. При заданной матрице $B^{(-1)}$ всегда существуют матрицы $R^{(-1)}$, при которых это условие выполнено.

Для рассматриваемой матрицы-функции $F(\mu,\varepsilon)$ имеем

$$\Delta_1(\mu) = R_{11}^{(-1)}R_{22}^{(0)} - R_{12}^{(-1)}R_{21}^{(0)} + R_{11}^{(0)}R_{22}^{(-1)} - R_{21}^{(-1)}R_{12}^{(0)} +$$
$$+R_{22}^{(0)}B_{11}^{(-1)} - R_{21}^{(0)}B_{12}^{(-1)} + R_{11}^{(0)}B_{22}^{(-1)} - R_{12}^{(0)}B_{21}^{(-1)} +$$
$$+\left(R_{11}^{(-1)}B_{22}^{(0)} - R_{12}^{(-1)}B_{21}^{(0)} + R_{22}^{(-1)}B_{11}^{(0)} - R_{21}^{(-1)}B_{12}^{(0)}\right)\mu +$$
$$+\left(B_{11}^{(-1)}B_{22}^{(0)} - B_{12}^{(-1)}B_{21}^{(0)} + B_{11}^{(0)}B_{22}^{(-1)} - B_{21}^{(-1)}B_{12}^{(0)}\right)\mu.$$

Поэтому, если $\Delta_1(\mu)$ отлично от 0, то разложение $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ начинается с

$$\frac{1}{\varepsilon\Delta_1(\mu)}\begin{pmatrix} R_{22}^{(-1)} + B_{22}^{(-1)} & -R_{12}^{(-1)} - B_{12}^{(-1)} \\ -R_{21}^{(-1)} - B_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)} + B_{11}^{(-1)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если $\Delta_0 = 0$ и $\Delta_1(\mu) \not\equiv 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[F_1(\mu,\varepsilon)]^{-1} = \frac{1}{\Delta_1(\mu)}\begin{pmatrix} R_{22}^{(-1)} + B_{22}^{(-1)} & -R_{12}^{(-1)} - B_{12}^{(-1)} \\ -R_{21}^{(-1)} - B_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)} + B_{11}^{(-1)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что здесь функция $\Delta_1(\mu)$, является многочленом первой степени относительно μ и, следовательно, имеет один корень.

Описанный случай будем называть основным резонансом. Он имеет место при выполнении одного скалярного условия на матрицу коэффициентов.

Если выполнено более сильное условие

$$R^{(-1)} + B^{(-1)} = 0,$$

то разложение начинается с члена

$$R^{(0)} + B^{(0)}\mu,$$

не содержащего ε и тогда главный член разложения обратной матрицы есть

$$[R^{(0)} + B^{(0)}\mu]^{-1}.$$

Здесь

$$\det[R^{(0)} + B^{(0)}\mu]$$

есть многочлен второй степени, имеющий два корня. Это есть случай двойного резонанса, который имеет место при выполении матричного равенства, т.е. четырех скалярных условий.

2. Вырожденные резонансы. Пусть разложение начинается $\frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)}\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}R^{(-1)} + R^{(0)} + \ldots,$$

где $R^{(-2)} \neq 0$ и

$$F_2(\mu,\varepsilon) = R(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}B(\varepsilon\mu).$$

Тогда

$$F_2(\mu,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}F(\mu,\varepsilon),$$

где $F(\mu,\varepsilon)$ – матрица-функция, рассмотренного выше вида. Так как

$$[F_2(\mu,\varepsilon)]^{-1} = \varepsilon^2[F(\mu,\varepsilon)]^{-1},$$

предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[F_2(\mu,\varepsilon)]^{-1}$$

будет ненулевым только в том случае, когда главный член разложения $[F(\mu,\varepsilon)]^{-1}$ содержит $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Это имеет место, если разложение определителя (3.2) начинается с ε^2. Таким образом, в этом случае для существования резонанса должно быть выполнено два условия:

$$\Delta_0(\mu) \equiv 0,\ \ \Delta_1(\mu) \equiv 0.$$

Матричные коэффициенты в этом разложении имеют специальный вид:

$$F^{(0)} = R^{(-2)};$$

$$F^{(1)} = R^{(-1)} + B^{(-1)};$$

$$F^{(2)}(\mu) = R^{(0)} + B^{(0)}\mu.$$

Поэтому Δ_0 и Δ_1 для данного случая не зависят от μ и существуют матрицы $R(\varepsilon)$, при которых условия резонанса $\Delta_0 = 0, \Delta_1 = 0$ выполнены.

Эти утверждения согласуются с полученным в [9] описанием резонансов для некоторых систем дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами, имеющих специальный вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишик*, *М.И.* Решения некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи матем. наук. – 1960. – Т. 15, № 3 (93). – С. 3–80.

2. *Романчук*, *Т.А.* Явление резонанса для матрично-значных функций / Т.А. Романчук // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.

3. *Антоневич*, *А.Б.* Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А.Б. Антоневич, Т.А. Романчук // LAP LAMBERT, 2012.

4. *Като*, *Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

5. *Курош*, *А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1965. – 431 с.

6. *Винберг*, *Э.Б.* Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп / Э.В. Винберг. – М.: Изд-во Факториал Пресс, 2001. – 544 с.

7. *Борухов*, *В.Т.* Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем / В.Т. Борухов // Автоматика и телемеханика. АН СССР. – 1978. – № 11. – С. 5–11.

8. *Гантмахер*, *Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

9. *Кот*, *М.Г.* О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ-образными коэффициентами / М.Г. Кот // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – С. 111–117.

Поступила в редакцию 02.10.17.